Serie Notas Técnicas

Superintendencia de Pensiones Avda.
Libertador Bdo. O'Higgins 1449
Santiago, Chile.

www.spensiones.cl

Nota Técnica N°5

CAPITAL NECESARIO UNITARIO (CNU): CÁLCULO E INTRODUCCIÓN DEL MÓDULO DE STATA CNU

George Vega

Agosto 2014

Las **Notas Técnicas** son una línea de publicaciones de la Superintendencia de Pensiones, que tienen por objeto divulgar artículos breves escritos por profesionales de esta institución.

Los trabajos aquí publicados tienen carácter preliminar y están disponibles para su discusión y comentarios. Los contenidos, análisis y conclusiones que puedan derivar de los documentos publicados son de exclusiva responsabilidad de su(s) autor(es) y no reflejan necesariamente la opinión de la Superintendencia de Pensiones.

Si requiere de mayor información o desea tomar contacto con quienes editan estos documentos, contacte a: documentosdetrabajo@spensiones.cl.

Si desea acceder a los títulos ya publicados y/o recibir las futuras publicaciones, por favor regístrese en nuestro sitio web: www.spensiones.cl.

Superintendencia de Avda.
Libertador Bdo. O'Higgins 1449
Santiago, Chile.
www.spensiones.cl

Nota técnica

Capital Necesario Unitario (CNU): Cálculo e Introducción del Módulo de Stata `cnu`

George Vega [*]
División de Estudios
Superintendencia de Pensiones

Mayo 2014

Resumen

La siguiente nota técnica describe en detalle cómo calcular el capital que necesita un afiliado del sistema de pensiones para financiar una unidad de pensión, el Capital Necesario Unitario (CNU). En éste, se detalla el tratamiento de las Tablas de Mortalidad en cuanto a su mejoramiento (ajuste) y al cálculo del número de sobrevivientes. Además se detalla la fórmula de cálculo del CNU para tres casos: (1) Afiliado soltero sin hijos; (2) Cónyuge sin hijos; y (3) Pensión de sobrevivencia para cónyuge sin hijos. El documento finaliza con la introducción y ejemplos de uso del módulo de Stata `cnu`, el cual fue desarrollado por la División de Estudios y testeado en conjunto con la División de Administración Interna e Informática (autores del equivalente en lenguaje `C`), que tiene por objetivo permitir realizar cálculos masivo de CNU.

[*]Analista de Investigación, gvega@spensiones.cl. El autor agradece los comentarios del equipo del Departamento de Investigación de la División de Estudios. Cualquier error es de responsabilidad del autor.

Índice

1. Introducción **2**

2. Tablas de mortalidad **3**

2.1. Número de sobrevivientes 5

2.2. Vigencia de las Tablas de Mortalidad 6

3. Capitales Necesarios **6**

3.1. Capital Necesario para afiliado soltero sin hijos (pensión de vejez o invalidez) 7

3.2. Capital Necesario para cónyuge sin hijos (pensión de vejez o invalidez) 8

3.3. Capital Necesario para cónyuge sin hijos (pensión de sobrevivencia) 8

4. `CNU` : Módulo de Stata para el cálculo masivo de Capitales Necesarios **9**

4.1. *CNU* para Retiro Programado con Vector de Tasas (pensión de vejez) 10

4.2. *CNU* para Retiro Programado con Tasa Única (pensión de vejez) 11

4.3. *CNU* para Renta Vitalicia (pensión de vejez) 12

4.4. *CNU* para cónyuge sin hijos (pensión de vejez) 13

4.5. *CNU* para cónyuge sin hijos (pensión de sobrevivencia) 14

Referencias **16**

1. Introducción

El Capital Necesario Unitario (CNU) se utiliza para calcular el monto del pago de pensiones. En particular, el monto que un afiliado recibirá como pensión mensual se determina dividiendo su saldo total de ahorro previsional por doce veces el CNU ($Saldo/(CNU \times 12)$). El Capital Necesario se determina en base a (1) las expectativas de vida del afiliado y sus beneficiarios, y (2) las expectativas de rentabilidad de los Fondos de Pensiones.

Las expectativas de vida del afiliado y sus beneficiarios se calculan en base a las Tablas de Mortalidad publicadas en conjunto por la Superintendencia de Valores y Seguros (SVS) y la Superintendencia de Pensiones (SP).[1] Estas son permanentemente evaluadas en cuanto a la medida en la que se ajustan a la mortalidad efectiva de la población.

Por su parte, en el caso del Retiro Programado, hasta diciembre de 2013, las expectativas de rentabilidad de los Fondos de Pensiones se materializaban a través del Vector de Tasas de Interés (Vector de Tasas), el cual a contar de enero del 2014 fue reemplazado por un tasa única, la cual es

[1] Un registro histórico de las Tablas de Mortalidad puede encontrarlo en el Compendio de Normas del Sistema de pensiones (Superintendencia de Pensiones, 2011c)

revisada trimestralmente. Al igual que las Tablas de Mortalidad, estas tasas (vector y tasa única) son calculadas por la Superintendencia de Valores y Seguros y la Superintencia de Pensiones, y publicadas por la SP.[2] Además de las tasas mencionadas y las Tablas de Mortalidad, la tasa que se utiliza para el cálculo de una Renta Vitalicia no es única, más aún, la determinan las Compañias Aseguradoras que ofrecen las Rentas Vitalicias. La oferta promedio del sistema es publicada mes a mes en el Centro de Estadísticas de la SP.[3]

Las fórmulas utilizadas para el cálculo del CNU, aunque matemáticamente sencillas, pueden ser difíciles de implementar, sobre todo cuando tomamos en cuenta que las Tablas de Mortalidad incorporan factores de ajuste que, en términos sencillos, se utilizan durante todo el proceso de cálculo. Motivado por esto último punto, la Superintendencia de Pensiones ha desarrollado el módulo `cnu`; una extensión del paquete estadístico Stata ideada para investigadores que permite calcular Capitales Necesarios de manera sencilla y eficiente. El módulo cuenta con todas las Tablas de Mortalidad del Sistema y todos los Vectores de Tasas de Interés publicados a la fecha, además de una amplia gama de opciones para poder calcular Capitales Necesarios tanto de manera escalar (uno a uno) como vectorial (cálculos masivos). Herramientas como ésta son fundamentales para la investigación y análisis del sistema de pensiones.

El documento se desarrolla como sigue: En la primera sección se explica como se utilizan las Tablas de Mortalidad en la fórmula del CNU, desarrollando paso a paso el cálculo de las expectativas de vida y su ajuste usando los factores que esta provee. En la siguiente sección se desarrollan las fórmulas de cálculo de tres tipos de CNU, para afiliado soltero sin hijos, para cónyuge sin hijos y de sobrevivencia para cónyuge sin hijos. El documento finaliza con una descripción detallada del módulo `cnu`, junto con algunos ejemplos que muestran en detalle los pasos de cálculo.

2. Tablas de mortalidad

Las tablas de mortalidad describen la mortalidad de una población en particular mostrando la probabilidad de que un individuo de edad x muera antes de cumplir la edad $x+1$, q. Estas se utilizan para (1) cálculo de pensión por Retiro Programado (RP), y (2) cálculo de reservas técnicas para Renta Vitalicia (RV). En el caso del sistema de pensiones chileno, tales tablas han sido elaboradas para seis grupos, distinguiendo entre géneros: (1-2) afiliados, (3-4) beneficiarios e (5-6) inválidos; denominadas como las tablas RV, B y MI respectivamente tanto para hombres como para mujeres; todas construidas en base de los afiliados pensionados y sus beneficiarios. Motivo por el cual no representan las expectativas de vida de toda la población.

Bajo la responsabilidad de la Superintendencia de Valores y Seguros y de esta Superintendencia, después de la reforma del 2008 las tablas de mortalidad son revisadas anualmente donde, dependiendo de su adecuación a la longevidad de los pensionados y sus beneficiarios, pueden ser prorrogadas o reemplazadas por tablas nuevas.

Considerando que la mortalidad de la población es cambiante en el tiempo (tabla de mortalidad dinámica) la probabilidad de muerte a la edad x (q_x) se puede ajustar utilizando el factor de mejoramiento correspondiente a cada edad x, AA_x. En términos concretos, la probabilidad de muerte

[2]La tasa vigente se encuentra publicada en el Centro de Estadísticas de la Superintendencia de Pensiones. Puede acceder aquí `http://www.spensiones.cl/safpstats/stats/.menu.selector.php?_mscfg=tasas_descto_interes`

[3]Puede revisar las tasas medias en el siquiente link: `http://www.spensiones.cl/safpstats/stats/.menu.selector.php?_url=/tasas/tirenvit.php&_msid=3&_mscfg=tasas_descto_interes`

mejorada q'_x, en el año t_j (que luego consideraremos como año de jubilación) para la tabla del año t_m se puede escribir como

$$q'_x = q_x \times (1 - AA_x)^{(t_j - t_m)}$$

Considerando que el cálculo del CNU depende de los t años transcurridos desde el año de jubilación, la mortalidad mejorada t años después de la edad de jubilación se describe como

$$q'_{x+t} = q_{x+t} \times (1 - AA_{x+t})^{(t_j - t_m + t)} \tag{1}$$

Tomemos como ejemplo una mujer que se jubila por vejez el año 2013 a los 60 años de edad, para la cual utilizaremos la tabla RV 2009 M. El valor de q_{60} se deberá ajustar como sigue

$$\begin{aligned} q'_{60} &= q_{60} \times (1 - AA_{60})^{(2013-2009+0)} \\ q'_{60} &= q_{60} \times (1 - AA_{60})^{4} \end{aligned}$$

de la misma manera q'_{61}, q'_{62}, q'_{63}, $\ldots$, q'_T se ajustan como sigue

$$\begin{aligned} q'_{61} &= q_{61} \times (1 - AA_{61})^{5} \\ q'_{62} &= q_{62} \times (1 - AA_{62})^{6} \\ q'_{63} &= q_{63} \times (1 - AA_{63})^{7} \\ &\vdots \\ q'_{x+T} &= q_{x+T} \times (1 - AA_{x+T})^{2013-2009+T} \end{aligned}$$

con lo que se explicita que el *envejecimiento* de la tabla se aplica de manera progresiva. Los cálculos correspondientes a este ejercicio se muestran en el siguiente cuadro:

Cuadro 1: Ejemplo de cálculo de mejoramiento

x	q_x	AA_x	$q_x \times (1 - AA_x)^{[(t_j - t_m)+t]} =$	q'_x
60	0,003137	0,0068	$0{,}003137 \times (1 - 0{,}0068)^{(2013-2009+0)}$	0,003053
61	0,003399	0,0068	$0{,}003399 \times (1 - 0{,}0068)^{(2013-2009+1)}$	0,003285
62	0,003702	0,0068	$0{,}003702 \times (1 - 0{,}0068)^{(2013-2009+2)}$	0,003553
63	0,004044	0,0068	$0{,}004044 \times (1 - 0{,}0068)^{(2013-2009+3)}$	0,003855

tales valores ajustados–última columna de la tabla–serán utilizados en el cálculo de la probabilidad de sobrevida en el Cuadro 3.

En la siguiente sección revisaremos cómo la mortalidad bruta mejorada se incorpora en el cálculo del número de sobrevivientes l.

2.1. Número de sobrevivientes

El número de individuos sobrevivientes a la edad x, l_x, se calcula utilizando las tablas de mortalidad, en particular

$$l_x = l_{x-1} \times (1 - q_{x-1}) \tag{2}$$

Tomando un ejemplo de Edwards (1997, p. 2), dada una población de 1000 individuos de 65 años de edad, y las mortalidades descritas en la siguiente tabla, el número de sobrevivientes debería evolucionar según el siguiente esquema:

Cuadro 2: Ejemplo de cálculo de sobrevivientes

x	q_x	$l_{x-1} \times (1 - q_{x-1}) =$	l_x
66	0,3	$1000 \times (1 - 0{,}2) =$	800
67	0,5	$800 \times (1 - 0{,}3) =$	560
68	1,0	$560 \times (1 - 0{,}5) =$	280

Al momento de calcular Capitales Necesarios, si consideramos el número de sobrevivientes iniciales como igual a 1, el número de sobrevivientes se puede entender como la probabilidad de sobrevida que tiene un individuo de edad x, t años después de su jubilación. De esta forma, lo que escribimos en la ecuación 2 puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
l_{x+1} &= l_x \times (1 - q'_x) \\
l_{x+2} &= l_x \times (1 - q'_x) \times (1 - q'_{x+1}) \\
&\vdots \\
l_{x+t} &= l_x \times (1 - q'_x) \times (1 - q'_{x+1}) \times \cdots \times (1 - q'_{x+t})
\end{aligned}$$

lo que se puede resumir como

$$l_{x+t} = l_x \times \prod_{i=1}^{t} (1 - q'_{x+i}) \tag{3}$$

Continuando con el ejemplo de mejoramiento, utilizando los valores de q' allí calculados, calcularemos los primeros tres valores de l_{x+t} (l_{61}, l_{62} y l_{63}):

Cuadro 3: Ejemplo de cálculo de probabilidad de sobrevida

x	q'_{x-1}	l_{x-1}	$l_{x-1} \times (1 - q'_{x-1}) =$	l_x
60		... Se asume parte con $l_{60} = 1$ ...		1
61	0,003053	1	$1 \times (1 - 0{,}003053) =$	0,996947
62	0,003285	0,996947	$0{,}996947 \times (1 - 0{,}003285) =$	0,993672
63	0,003553	0,993672	$0{,}993672 \times (1 - 0{,}003553) =$	0,990142

Nota: Los valores de q'_x son resultado de lo calculado en el Cuadro 1

Finalmente, para este caso la serie completa de l_x se puede apreciar en el primer ejemplo de uso del módulo `cnu` que se encuentra en la sección 4.1.

2.2. Vigencia de las Tablas de Mortalidad

A continuación se muestra un cuadro resumen que indica el periodo de vigencia de las tablas de mortalidad:

Cuadro 4: Vigencia Tablas de Mortalidad

	Afiliado no Inválido		Beneficiario no Inválido		Inválido	
Fecha del Siniestro	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer
(;31-01-2005]	RV 85 H	RV 85 M	B 85 H	B 85 M	MI 85 H	MI 85 M
[01-02-2005;31-01-2008]	RV 2004 H	RV 2004 M	B 85 H	B 85 M	MI 85 H	MI 85 M
[01-02-2008;30-06-2010]	RV 2004 H	RV 2004 M	B 2006 H	B 2006 M	MI 2006 H	MI 2006 M
[01-07-2010;)	RV 2009 H	RV 2009 M	B 2006 H	B 2006 M	MI 2006 H	MI 2006 M

Nota: Las tablas de invalidez aplican tanto para afiliados como para beneficiarios

Para obtener información respecto al proceso de transición entre tablas puede revisar los siguientes capítulos del Libro III del Compendio de Normas del Sistema de Pensiones:

- Capítulo II. Aplicación de la Tabla de mortalidad RV - 2004 `http://www.spensiones.cl/compendio/577/w3-propertyvalue-4347.html`
- Capítulo IV. Aplicación de las tablas de mortalidad B- 2006 Y MI-2006 `http://www.spensiones.cl/compendio/577/w3-propertyvalue-3537.html`
- Capítulo VI. Aplicación Tablas de mortalidad RV - 2009 en el cálculo de los Retiros Programados de pensionados por vejez `http://www.spensiones.cl/compendio/577/w3-propertyvalue-4349.html`

En el caso de pensión de invalidez, para los beneficiarios aplican las mismas tablas de invalidez que utilizan los afiliados inválidos.

Para más información acerca de la formalidad de las tablas de mortalidad se recomienda ver Edwards (1997).

3. Capitales Necesarios

El capital necesario unitario es el capital que necesita el afiliado para financiar una unidad de pensión, tanto para él como para sus posibles beneficiarios. Es la suma de los capitales necesarios para financiar las pensiones de referencia del afiliado y sus beneficiarios.

$$CNU = CNU_a + \sum CNU_{b,j}$$

donde CNU_a corresponde al capital necesario del afiliado (fórmula 2.1) y $CNU_{b,j}$ al capital necesario del beneficiario j-ésimo. De esto se desprende que en el caso de que el individuo no cuente con beneficiarios, el valor del CNU total será igual al valor del CNU_a.

De acuerdo con la normativa vigente, los respectivos capitales necesarios unitarios y el valor presente de la cuota mortuoria[4] se determinarán considerando (1) las edades actuariales (entero más cercano a la edad expresada como un número real) que el afiliado y sus beneficiarios tenían a la fecha del siniestro y (2) la tasa de interés de actualización vigente a la misma fecha, que a partir de enero de 2014 es una tasa única tanto si el afiliado se pensionó por Retiro Programado o por Renta Vitalicia.[5]

La fecha utilizada para el cálculo depende del tipo de pensión que se esté calculando. Para pensiones por vejez tal fecha corresponderá a la fecha de la solicitud de trámite. En el caso de las pensiones de invalidez, corresponderá a la fecha en la que quedó ejecutoriado el segundo dictamen (o el dictamen único), el cual determina si se aprueba o rechaza el estado de invalidez del afiliado. Por último, en el caso de las pensiones de sobrevivencia, se utiliza la fecha de fallecimiento del afiliado.

En el caso del cálculo utilizando un vector de tasas, es importante considerar que el vector debe ajustarse al número de años al que se está proyectando, es decir, si el largo del vector es menor que el número de periodos a proyectar, el vector se debe extender repitiendo el último valor de este cuantas veces sea necesario. El número de periodos a proyectar dependerá de las tablas de mortalidad. En el caso de que sea una tasa única, basta con utilizar la misma tasa durante todos los periodos de proyección. Para entender mejor este punto, se puede referir al ejemplo de la sección 4.1 donde se desarrolla paso a paso el caso completo del CNU para una afiliada de 60 años.

A continuación se describen las fórmulas de cálculo de CNU para afiliado soltero sin hijos, cónyuge sin hijos y CNU para pensión de sobrevivencia de cónyuge sin hijos.

3.1. Capital Necesario para afiliado soltero sin hijos (pensión de vejez o invalidez)

En el caso de un individuo soltero y sin hijos de edad x que se jubila en el año t_j[6]

$$CNU = \sum_{t=0}^{T} \frac{\frac{l_{x+t}}{l_x}}{(1+i_t)^t} - \frac{11}{24} \tag{4}$$

donde $T = 110 - x$, que corresponde al número de años que puede recorrer el individuo en la tabla de mortalidad correspondiente[7].

De lo anterior se desprende que, dado que la probabilidad de sobrevivencia en $t = 0$ (l_x) es 1, 4

[4]Beneficio otorgado a quien conlleve los gastos funerarios del afiliado, que corresponde a un retiro de 15UF (o menos, dependiendo del caso) del saldo de la cuenta de capitalización individual del afiliado. Para más información ver (Superintendencia de Pensiones, 2011b)

[5]Antes de esa fecha, para el Retiro Programado se utilizaba un vector de tasas.

[6]Recordar que el año de jubilación determina la tabla de mortalidad que se utilizará y el mejoramiento de la misma.

[7]Punto importante considerando que depende de la edad actual de individuo

puede reescribirse de la siguiente manera

$$CNU = \sum_{t=0}^{T} \frac{l_{x+t}}{(1+i_t)^t} - \frac{11}{24} \tag{5}$$

El valor de i_t depende de si se está usando una tasa única o un vector de tasas. En el caso de una tasa única, i_t es una constante; en el caso de un vector de tasas, i_t corresponde al elemento t-ésimo del vector de tasas utilizado para el cálculo de la pensión. Para los retiros programados calculados a partir de enero de 2014 i_t corresponde a la tasa única informada por la Superintendencia de Pensiones.

3.2. Capital Necesario para cónyuge sin hijos (pensión de vejez o invalidez)

En este caso, existen dos maneras equivalentes de calcular el CNU, la primera forma es:

$$CNU = 0{,}6 \times \left[\sum_{t=0}^{T} \frac{l_{y+t}}{l_y \times (1+i_t)^t} - \sum_{t=0}^{T} \frac{l_{x+t} \times l_{y+t}}{l_x \times l_y \times (1+i_t)^t} \right]$$

la cual es equivalente a

$$CNU = 0{,}6 \times \left[\sum_{t=0}^{T} \frac{l_{y+t}}{l_y \times (1+i_t)^t} - \left(1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}\right) \right]$$

donde para ambas y es la edad de la cónyuge del afiliado, l_y es la probabilidad de sobrevida del cónyuge y $T = 110 - y$.

Por último, al igual que el CNU para el afiliado, dejando l_y y l_x igual a uno:

$$CNU = 0{,}6 \times \left[\sum_{t=0}^{T} \frac{l_{y+t}}{(1+i_t)^t} \times (1 - l_{x+t}) \right] \tag{6}$$

3.3. Capital Necesario para cónyuge sin hijos (pensión de sobrevivencia)

Para este último caso, $T = 110 - y$

$$CNU = 0{,}6 \left[\sum_{t=0}^{T} \frac{l_{y+t}}{l_y \times (1+i_t)^t} - \frac{11}{24} \right]$$

que, aplicando las mismas consideraciones que en los casos anteriores, puede ser reescrita como

$$CNU = 0{,}6 \left[\sum_{t=0}^{T} \frac{l_{y+t}}{(1+i_t)^t} - \frac{11}{24} \right] \tag{7}$$

4. `CNU` : Módulo de Stata para el cálculo masivo de Capitales Necesarios

El módulo `CNU` ha sido escrito principalmente en `mata` (lenguaje matricial de `stata`), y diseñado principalmente para realizar cálculo de CNU en forma masiva; en particular, al ser lenguaje compilado, el desempeño del módulo es notable permitiendo calcular *cnu* para miles de observaciones de manera simultánea en cuestión de segundos. Sus principales características son:

- Calcular CNU de las ecuaciones 5, 6 y 7, tanto para hombres como para mujeres,
- Calcular Rentas Vitalicias y Retiros programados,
- Acceder a vectores de tasas precargados (todos los utilizados por el sistema),
- Utilizar vectores de tasas definidos por el usuario,
- Acceder a tablas de mortalidad precargadas (todas las utilizadas por el sistema),
- Utilizar tablas de mortalidad definidas por el usuario,
- Asignar dinámicamente tablas de mortalidad correspondientes (a través de la variable `fsiniestro` [fecha del siniestro]),
- Implementar las fórmulas de manera escalar (1 individuo) o vectorial (n individuos) de manera eficiente (rápida),

En el caso de cálculos masivos, `cnu` puede ser utilizado junto con el módulo `parallel`. La integración con este último permite disminuir los tiempos de cálculo de manera sencilla sin mayor esfuerzo del usuario. Por este motivo la versión actual de `cnu` requiere ser instalada en conjunto con `parallel`

Para su instalación, `cnu` se encuentra disponible en el *Statistical Software Components (SSC)* de Boston College y puede ser descargado por los usuarios de Stata ingresando la siguiente linea de comando

```
. ssc install parallel
. ssc install cnu
. mata mata mlib query
```

Cualquier actualización que sea realizada será puesta a disposición de la comunidad a través de este mismo medio. Una fuente alternativa de instalación es la siguiente

```
. net from http://software.ggvega.com/stata
. net install parallel
. net install cnu
. mata mata mlib query
```

A continuación se presentan algunos ejemplos de cálculo utilizando la implementación escalar del módulo, en los cuales, utilizando la opción `pasos` se muestran en detalle los pasos de cálculo de cada caso.

4.1. *CNU* para Retiro Programado con Vector de Tasas (pensión de vejez)

Los parámetros utilizados:

- afiliado mujer (`cotm(1)`)
- retiro programado con vector del año 2013 (`agnovector(2013)`)
- 67 años de edad (`67`)
- calculado el 2013 (`agnoactual(2013)`)
- Utilizando la tabla RV 2009 (`tabla(rv2009)`)

```
. cnu_afili 67, cotm(1) pasos agnoactual(2013) agnovector(2013) tabla(rv2009)
t =   0: CNU = 1
t =   1: cnu =  1.000000 + .994371387/((1 + .0443)^1)
t =   2: cnu =  1.952189 + .988302953/((1 + .0409)^2)
t =   3: cnu =  2.864352 + .98173783/((1 + .0399)^3)
t =   4: cnu =  3.737365 + .974574772/((1 + .0392)^4)
t =   5: cnu =  4.573004 + .96669538/((1 + .0387)^5)
t =   6: cnu =  5.372541 + .957964681/((1 + .0384)^6)
t =   7: cnu =  6.136661 + .948244283/((1 + .0383)^7)
t =   8: cnu =  6.865548 + .937397019/((1 + .0383)^8)
t =   9: cnu =  7.559518 + .925208744/((1 + .0383)^9)
t =  10: cnu =  8.219199 + .911599627/((1 + .0384)^10)
t =  11: cnu =  8.844599 + .896403039/((1 + .0386)^11)
t =  12: cnu =  9.435577 + .879431901/((1 + .0387)^12)
t =  13: cnu =  9.993175 + .860485433/((1 + .0389)^13)
t =  14: cnu = 10.517118 + .839185739/((1 + .0391)^14)
t =  15: cnu = 11.007637 + .815296414/((1 + .0392)^15)
t =  16: cnu = 11.465598 + .788598583/((1 + .0394)^16)
t =  17: cnu = 11.890543 + .758900046/((1 + .0396)^17)
t =  18: cnu = 12.282698 + .726128964/((1 + .0398)^18)
t =  19: cnu = 12.642379 + .690208278/((1 + .04)^19)
t =  20: cnu = 12.969981 + .651146151/((1 + .0402)^20)
t =  21: cnu = 13.266015 + .609064487/((1 + .0402)^21)
t =  22: cnu = 13.532215 + .564353489/((1 + .0402)^22)
t =  23: cnu = 13.769342 + .517439337/((1 + .0402)^23)
t =  24: cnu = 13.978355 + .468896711/((1 + .0402)^24)
t =  25: cnu = 14.160439 + .419436668/((1 + .0402)^25)
t =  26: cnu = 14.317022 + .369879993/((1 + .0402)^26)
t =  27: cnu = 14.449769 + .32111695/((1 + .0402)^27)
t =  28: cnu = 14.560561 + .274056976/((1 + .0402)^28)
t =  29: cnu = 14.651462 + .229732194/((1 + .0402)^29)
t =  30: cnu = 14.724716 + .188875109/((1 + .0402)^30)
t =  31: cnu = 14.782615 + .151923896/((1 + .0402)^31)
t =  32: cnu = 14.827386 + .119453447/((1 + .0402)^32)
t =  33: cnu = 14.861229 + .091082945/((1 + .0402)^33)
t =  34: cnu = 14.886036 + .067120154/((1 + .0402)^34)
t =  35: cnu = 14.903610 + .048520557/((1 + .0402)^35)
t =  36: cnu = 14.915824 + .034150937/((1 + .0402)^36)
t =  37: cnu = 14.924088 + .023341799/((1 + .0402)^37)
t =  38: cnu = 14.929518 + .015446081/((1 + .0402)^38)
t =  39: cnu = 14.932973 + .009862092/((1 + .0402)^39)
t =  40: cnu = 14.935093 + .006051748/((1 + .0402)^40)
t =  41: cnu = 14.936344 + .003552871/((1 + .0402)^41)
t =  42: cnu = 14.937050 + .001984993/((1 + .0402)^42)
t =  43: cnu = 14.937429 + .00104881/((1 + .0402)^43)
t =  44: cnu = 14.937622 + 0/((1 + .0402)^44)
CNU RP para soltero sin hijos (tabla rv2009), vector 2013 en el ao 2013
14.479290
```

4.2. *CNU* para Retiro Programado con Tasa Única (pensión de vejez)

Los parámetros utilizados:

- afiliado mujer (`cotm(1)`)
- retiro programado con tasa de 3.66 % (`rp(0.0366)`)
- 67 años de edad (`67`)
- calculado el 2013 (`agnoactual(2013)`)
- Utilizando la tabla RV 2009 (`tabla(rv2009)`)

```
. cnu_afili 67, cotm(1) pasos agnoactual(2013) rp(0.0366) tabla(rv2009)
t =   0: CNU = 1
t =   1: cnu =  1.000000 + .994371387/((1 + .0366)^1)
t =   2: cnu =  1.959262 + .988302953/((1 + .0366)^2)
t =   3: cnu =  2.879008 + .98173783/((1 + .0366)^3)
t =   4: cnu =  3.760385 + .974574772/((1 + .0366)^4)
t =   5: cnu =  4.604440 + .96669538/((1 + .0366)^5)
t =   6: cnu =  5.412109 + .957964681/((1 + .0366)^6)
t =   7: cnu =  6.184224 + .948244283/((1 + .0366)^7)
t =   8: cnu =  6.921520 + .937397019/((1 + .0366)^8)
t =   9: cnu =  7.624648 + .925208744/((1 + .0366)^9)
t =  10: cnu =  8.294130 + .911599627/((1 + .0366)^10)
t =  11: cnu =  8.930474 + .896403039/((1 + .0366)^11)
t =  12: cnu =  9.534117 + .879431901/((1 + .0366)^12)
t =  13: cnu = 10.105421 + .860485433/((1 + .0366)^13)
t =  14: cnu = 10.644681 + .839185739/((1 + .0366)^14)
t =  15: cnu = 11.152023 + .815296414/((1 + .0366)^15)
t =  16: cnu = 11.627520 + .788598583/((1 + .0366)^16)
t =  17: cnu = 12.071207 + .758900046/((1 + .0366)^17)
t =  18: cnu = 12.483109 + .726128964/((1 + .0366)^18)
t =  19: cnu = 12.863309 + .690208278/((1 + .0366)^19)
t =  20: cnu = 13.211941 + .651146151/((1 + .0366)^20)
t =  21: cnu = 13.529230 + .609064487/((1 + .0366)^21)
t =  22: cnu = 13.815534 + .564353489/((1 + .0366)^22)
t =  23: cnu = 14.071454 + .517439337/((1 + .0366)^23)
t =  24: cnu = 14.297815 + .468896711/((1 + .0366)^24)
t =  25: cnu = 14.495698 + .419436668/((1 + .0366)^25)
t =  26: cnu = 14.666458 + .369879993/((1 + .0366)^26)
t =  27: cnu = 14.811726 + .32111695/((1 + .0366)^27)
t =  28: cnu = 14.933390 + .274056976/((1 + .0366)^28)
t =  29: cnu = 15.033557 + .229732194/((1 + .0366)^29)
t =  30: cnu = 15.114560 + .188875109/((1 + .0366)^30)
t =  31: cnu = 15.178805 + .151923896/((1 + .0366)^31)
t =  32: cnu = 15.228656 + .119453447/((1 + .0366)^32)
t =  33: cnu = 15.266469 + .091082945/((1 + .0366)^33)
t =  34: cnu = 15.294283 + .067120154/((1 + .0366)^34)
t =  35: cnu = 15.314056 + .048520557/((1 + .0366)^35)
t =  36: cnu = 15.327845 + .034150937/((1 + .0366)^36)
t =  37: cnu = 15.337208 + .023341799/((1 + .0366)^37)
t =  38: cnu = 15.343381 + .015446081/((1 + .0366)^38)
t =  39: cnu = 15.347322 + .009862092/((1 + .0366)^39)
t =  40: cnu = 15.349749 + .006051748/((1 + .0366)^40)
t =  41: cnu = 15.351186 + .003552871/((1 + .0366)^41)
t =  42: cnu = 15.352000 + .001984993/((1 + .0366)^42)
t =  43: cnu = 15.352439 + .00104881/((1 + .0366)^43)
t =  44: cnu = 15.352662 + 0/((1 + .0366)^44)
CNU RP para soltero sin hijos (tabla rv2009), tasa 3.66% en el ao 2013
14.894330
```

4.3. *CNU* para Renta Vitalicia (pensión de vejez)

Los parámetros utilizados:

- afiliado hombre (Se puede omitir la opción `cotm(0)`)
- renta vitalicia con tasa de 3.2 % (`rv(0.032)`)
- 67 años de edad (`67`)
- calculado el 2013 (`agnoactual(2013)`)
- Utilizando la tabla RV 2009 (`tabla(rv2009)`)

```
. cnu_afili 67, pasos agnoactual(2013) rv(0.032) tabla(rv2009)
t =   0: CNU = 1
t =   1: cnu =  1.000000 + .985549295/((1 + .032)^1)
t =   2: cnu =  1.954990 + .970008646/((1 + .032)^2)
t =   3: cnu =  2.865775 + .953320138/((1 + .032)^3)
t =   4: cnu =  3.733136 + .935431152/((1 + .032)^4)
t =   5: cnu =  4.557830 + .916266905/((1 + .032)^5)
t =   6: cnu =  5.340581 + .895769082/((1 + .032)^6)
t =   7: cnu =  6.082093 + .873904982/((1 + .032)^7)
t =   8: cnu =  6.783074 + .850636992/((1 + .032)^8)
t =   9: cnu =  7.444234 + .825752652/((1 + .032)^9)
t =  10: cnu =  8.066151 + .799415655/((1 + .032)^10)
t =  11: cnu =  8.649564 + .771614611/((1 + .032)^11)
t =  12: cnu =  9.195226 + .74230811/((1 + .032)^12)
t =  13: cnu =  9.703886 + .711463285/((1 + .032)^13)
t =  14: cnu = 10.176293 + .679022441/((1 + .032)^14)
t =  15: cnu = 10.613179 + .643679069/((1 + .032)^15)
t =  16: cnu = 11.014484 + .605472966/((1 + .032)^16)
t =  17: cnu = 11.380264 + .564813699/((1 + .032)^17)
t =  18: cnu = 11.710900 + .521889366/((1 + .032)^18)
t =  19: cnu = 12.006935 + .477232152/((1 + .032)^19)
t =  20: cnu = 12.269246 + .431543759/((1 + .032)^20)
t =  21: cnu = 12.499088 + .385407677/((1 + .032)^21)
t =  22: cnu = 12.697994 + .339740687/((1 + .032)^22)
t =  23: cnu = 12.867894 + .295283072/((1 + .032)^23)
t =  24: cnu = 13.010983 + .252890361/((1 + .032)^24)
t =  25: cnu = 13.129729 + .213161531/((1 + .032)^25)
t =  26: cnu = 13.226717 + .176667089/((1 + .032)^26)
t =  27: cnu = 13.304607 + .143934101/((1 + .032)^27)
t =  28: cnu = 13.366098 + .11509932/((1 + .032)^28)
t =  29: cnu = 13.413746 + .090312988/((1 + .032)^29)
t =  30: cnu = 13.449973 + .069388392/((1 + .032)^30)
t =  31: cnu = 13.476944 + .052205633/((1 + .032)^31)
t =  32: cnu = 13.496607 + .038420957/((1 + .032)^32)
t =  33: cnu = 13.510629 + .027560252/((1 + .032)^33)
t =  34: cnu = 13.520376 + .01921825/((1 + .032)^34)
t =  35: cnu = 13.526962 + .013014404/((1 + .032)^35)
t =  36: cnu = 13.531283 + .008533853/((1 + .032)^36)
t =  37: cnu = 13.534029 + .005400478/((1 + .032)^37)
t =  38: cnu = 13.535713 + .003285726/((1 + .032)^38)
t =  39: cnu = 13.536706 + .001913522/((1 + .032)^39)
t =  40: cnu = 13.537266 + .001061245/((1 + .032)^40)
t =  41: cnu = 13.537567 + .000557138/((1 + .032)^41)
t =  42: cnu = 13.537720 + .00027489/((1 + .032)^42)
t =  43: cnu = 13.537793 + .00012637/((1 + .032)^43)
t =  44: cnu = 13.537826 + 0/((1 + .032)^44)
CNU RV para soltero sin hijos (tabla rv2009), tasa 3.2% en el ao 2013
13.079490
```

4.4. *CNU* para cónyuge sin hijos (pensión de vejez)

Los parámetros utilizados:

- afiliado mujer (`cotm(1)`)
- cónyuge hombre (`conym(0)`)
- retiro programado con vector del año 2013 (`agnovector(2013)`
- afiliado de 60 años de edad (`60`)
- cónyuge de 65 años de edad (`65`)
- calculado el 2013 (`agnoactual(2013)`)
- Utilizando la tabla RV 2009 para el afiliado (`tabla(rv2009)`)
- Utilizando la tabla B 2006 para el cónyuge (`tablab(b2006)`)

```
. cnu_cnyg_s_hi 60 65, cotm(1) conym(0) pasos agnoactual(2013) agnovector(2013)
>  tabla(rv2009) tablab(b2006)
t =   0: CNU = 1
t =   1: cnu =  0.000000 + (.987174651/(1 + .0443)^1)*(1 - .996947265)
t =   2: cnu =  0.002886 + (.973285965/(1 + .0409)^2)*(1 - .99367225)
t =   3: cnu =  0.008570 + (.958310883/(1 + .0399)^3)*(1 - .990141538)
t =   4: cnu =  0.016971 + (.942211942/(1 + .0392)^4)*(1 - .986324243)
t =   5: cnu =  0.028020 + (.924962303/(1 + .0387)^5)*(1 - .982188913)
t =   6: cnu =  0.041646 + (.906560868/(1 + .0384)^6)*(1 - .977708655)
t =   7: cnu =  0.057765 + (.886965625/(1 + .0383)^7)*(1 - .972867554)
t =   8: cnu =  0.076263 + (.866150819/(1 + .0383)^8)*(1 - .967647054)
t =   9: cnu =  0.097009 + (.844103127/(1 + .0383)^9)*(1 - .962017137)
t =  10: cnu =  0.119869 + (.820770411/(1 + .0384)^10)*(1 - .955924679)
t =  11: cnu =  0.144687 + (.795790898/(1 + .0386)^11)*(1 - .949270574)
t =  12: cnu =  0.171302 + (.769413672/(1 + .0387)^12)*(1 - .941948559)
t =  13: cnu =  0.199622 + (.741620518/(1 + .0389)^13)*(1 - .933832417)
t =  14: cnu =  0.229501 + (.712377199/(1 + .0391)^14)*(1 - .924792456)
t =  15: cnu =  0.260817 + (.681675403/(1 + .0392)^15)*(1 - .914699758)
t =  16: cnu =  0.293479 + (.649533369/(1 + .0394)^16)*(1 - .903321278)
t =  17: cnu =  0.327317 + (.61420887/(1 + .0396)^17)*(1 - .890609113)
t =  18: cnu =  0.362037 + (.575897021/(1 + .0398)^18)*(1 - .876404935)
t =  19: cnu =  0.397294 + (.535134675/(1 + .04)^19)*(1 - .860530456)
t =  20: cnu =  0.432719 + (.492294156/(1 + .0402)^20)*(1 - .842793491)
t =  21: cnu =  0.467904 + (.44801625/(1 + .0402)^21)*(1 - .822778217)
t =  22: cnu =  0.502606 + (.403077063/(1 + .0402)^22)*(1 - .800242983)
t =  23: cnu =  0.536438 + (.358058876/(1 + .0402)^23)*(1 - .774959416)
t =  24: cnu =  0.568986 + (.313897646/(1 + .0402)^24)*(1 - .746721278)
t =  25: cnu =  0.599859 + (.271231919/(1 + .0402)^25)*(1 - .715456241)
t =  26: cnu =  0.628671 + (.23082598/(1 + .0402)^26)*(1 - .681066884)
t =  27: cnu =  0.655092 + (.192770102/(1 + .0402)^27)*(1 - .643535787)
t =  28: cnu =  0.678800 + (.157786141/(1 + .0402)^28)*(1 - .602954272)
t =  29: cnu =  0.699580 + (.126623083/(1 + .0402)^29)*(1 - .559704217)
t =  30: cnu =  0.717357 + (.099560684/(1 + .0402)^30)*(1 - .514176863)
t =  31: cnu =  0.732184 + (.076666806/(1 + .0402)^31)*(1 - .466911024)
t =  32: cnu =  0.744229 + (.057726703/(1 + .0402)^32)*(1 - .418583766)
t =  33: cnu =  0.753737 + (.042564114/(1 + .0402)^33)*(1 - .369986876)
t =  34: cnu =  0.761041 + (.030718323/(1 + .0402)^34)*(1 - .321989656)
t =  35: cnu =  0.766494 + (.021677133/(1 + .0402)^35)*(1 - .275491092)
t =  36: cnu =  0.770448 + (.014879125/(1 + .0402)^36)*(1 - .231554427)
t =  37: cnu =  0.773214 + (.009954825/(1 + .0402)^37)*(1 - .190917862)
t =  38: cnu =  0.775088 + (.00648095/(1 + .0402)^38)*(1 - .154009222)
t =  39: cnu =  0.776314 + (.004101889/(1 + .0402)^39)*(1 - .121459976)
t =  40: cnu =  0.777089 + (.002518153/(1 + .0402)^40)*(1 - .092814242)
t =  41: cnu =  0.777561 + (.001497389/(1 + .0402)^41)*(1 - .068395969)
t =  42: cnu =  0.777839 + (.000861073/(1 + .0402)^42)*(1 - .049442832)
```

```
t =  43: cnu =  0.777995 + (.000477945/(1 + .0402)^43)*(1 - .034800075)
t =  44: cnu =  0.778080 + (.000255009/(1 + .0402)^44)*(1 - .023785479)
t =  45: cnu =  0.778124 + (.000128937/(1 + .0402)^45)*(1 - .015739679)
t =  46: cnu =  0.778145 + (0/(1 + .0402)^46)*(1 - .01004955)
CNU RP para conyuge sin hijos (tablas rv2009 b2006), vector 2013 en el ao 2013
 0.466887
```

4.5. *CNU* para cónyuge sin hijos (pensión de sobrevivencia)

Los parámetros utilizados:

- cónyuge hombre (`conym(0)`)
- retiro programado con vector del año 2013 (`agnovector(2013`)
- cónyuge de 65 años de edad (`65`)
- calculado el 2013 (`agnoactual(2013)`)
- Utilizando la tabla B 2006 para el cónyuge (`tablab(b2006)`)

```
. cnu_sobr_cnyg_s_hi 65, conym(0) pasos agnoactual(2013) agnovector(2013) tabla
> b(b2006)
t =   0: CNU = 1
t =   1: cnu =  1.000000 + .987174651/((1 + .0443)^1)
t =   2: cnu =  1.945298 + .973285965/((1 + .0409)^2)
t =   3: cnu =  2.843600 + .958310883/((1 + .0399)^3)
t =   4: cnu =  3.695781 + .942211942/((1 + .0392)^4)
t =   5: cnu =  4.503670 + .924962303/((1 + .0387)^5)
t =   6: cnu =  5.268691 + .906560868/((1 + .0384)^6)
t =   7: cnu =  5.991809 + .886965625/((1 + .0383)^7)
t =   8: cnu =  6.673593 + .866150819/((1 + .0383)^8)
t =   9: cnu =  7.314818 + .844103127/((1 + .0383)^9)
t =  10: cnu =  7.916671 + .820770411/((1 + .0384)^10)
t =  11: cnu =  8.479757 + .795790898/((1 + .0386)^11)
t =  12: cnu =  9.004404 + .769413672/((1 + .0387)^12)
t =  13: cnu =  9.492245 + .741620518/((1 + .0389)^13)
t =  14: cnu =  9.943813 + .712377199/((1 + .0391)^14)
t =  15: cnu = 10.360210 + .681675403/((1 + .0392)^15)
t =  16: cnu = 10.743114 + .649533369/((1 + .0394)^16)
t =  17: cnu = 11.093122 + .61420887/((1 + .0396)^17)
t =  18: cnu = 11.410510 + .575897021/((1 + .0398)^18)
t =  19: cnu = 11.695774 + .535134675/((1 + .04)^19)
t =  20: cnu = 11.949772 + .492294156/((1 + .0402)^20)
t =  21: cnu = 12.173586 + .44801625/((1 + .0402)^21)
t =  22: cnu = 12.369398 + .403077063/((1 + .0402)^22)
t =  23: cnu = 12.538761 + .358058876/((1 + .0402)^23)
t =  24: cnu = 12.683394 + .313897646/((1 + .0402)^24)
t =  25: cnu = 12.805288 + .271231919/((1 + .0402)^25)
t =  26: cnu = 12.906544 + .23082598/((1 + .0402)^26)
t =  27: cnu = 12.989385 + .192770102/((1 + .0402)^27)
t =  28: cnu = 13.055895 + .157786141/((1 + .0402)^28)
t =  29: cnu = 13.108230 + .126623083/((1 + .0402)^29)
t =  30: cnu = 13.148607 + .099560684/((1 + .0402)^30)
t =  31: cnu = 13.179126 + .076666806/((1 + .0402)^31)
t =  32: cnu = 13.201720 + .057726703/((1 + .0402)^32)
t =  33: cnu = 13.218074 + .042564114/((1 + .0402)^33)
t =  34: cnu = 13.229667 + .030718323/((1 + .0402)^34)
t =  35: cnu = 13.237710 + .021677133/((1 + .0402)^35)
t =  36: cnu = 13.243167 + .014879125/((1 + .0402)^36)
t =  37: cnu = 13.246767 + .009954825/((1 + .0402)^37)
t =  38: cnu = 13.249083 + .00648095/((1 + .0402)^38)
t =  39: cnu = 13.250533 + .004101889/((1 + .0402)^39)
```

```
t =  40: cnu = 13.251415 + .002518153/((1 + .0402)^40)
t =  41: cnu = 13.251935 + .001497389/((1 + .0402)^41)
t =  42: cnu = 13.252233 + .000861073/((1 + .0402)^42)
t =  43: cnu = 13.252397 + .000477945/((1 + .0402)^43)
t =  44: cnu = 13.252485 + .000255009/((1 + .0402)^44)
t =  45: cnu = 13.252530 + .000128937/((1 + .0402)^45)
CNU sobrev RP para conyuge sin hijos (tabla b2006), vector 2013 en el ao 2013
 7.676531
```

Referencias

Edwards, G. (1997). *Introducción al análisis de rentas vitalicias* (Trabajo Docente IE-PUC n.º 58). Instituto de Economía, Pontificia Universidad Católica de Chile. Descargado de `http://www.economia.puc.cl/docs/trd_58.pdf` 5, 6

Pino Emhart, F. (2005). *Retiros programados y nuevas tablas de mortalidad* (Nota técnica n.º 1). Superintendencia de Pensiones. Descargado de `http://www.spensiones.cl/portal/informes/581/articles-2871_pdf.pdf`

Superintendencia de Pensiones. (2011a). Anexo n 7 capitales necesarios. En *Compendio de normas del sistema de pensiones* (cap. I). Descargado de `http://www.spensiones.cl/compendio/577/w3-propertyvalue-3262.html`

Superintendencia de Pensiones. (2011b). Cuota mortuoria. En *Compendio de normas del sistema de pensiones* (cap. II). Descargado de `http://www.spensiones.cl/compendio/577/w3-propertyvalue-3227.html` 7

Superintendencia de Pensiones. (2011c). Tablas de mortalidad. En *Compendio de normas del sistema de pensiones* (cap. X). Descargado de `http://www.spensiones.cl/compendio/577/w3-propertyvalue-3483.html` 2